შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 11	25.04.2015/ მათ/III/ 623

ამოცანა № 1	გვერდი № 1

თუ I △ABC სამკუთხედში ჩახაზული წრეწირის ცენტრია, მაშინ AI და BI ხაზები შესაბამისად ∠BAC და ∠ABC კუთხეების ბისექტრისებია.

∠BAC აღვნიშნოთ 2α-ით

∠ABC 2β-ით, ხოლო

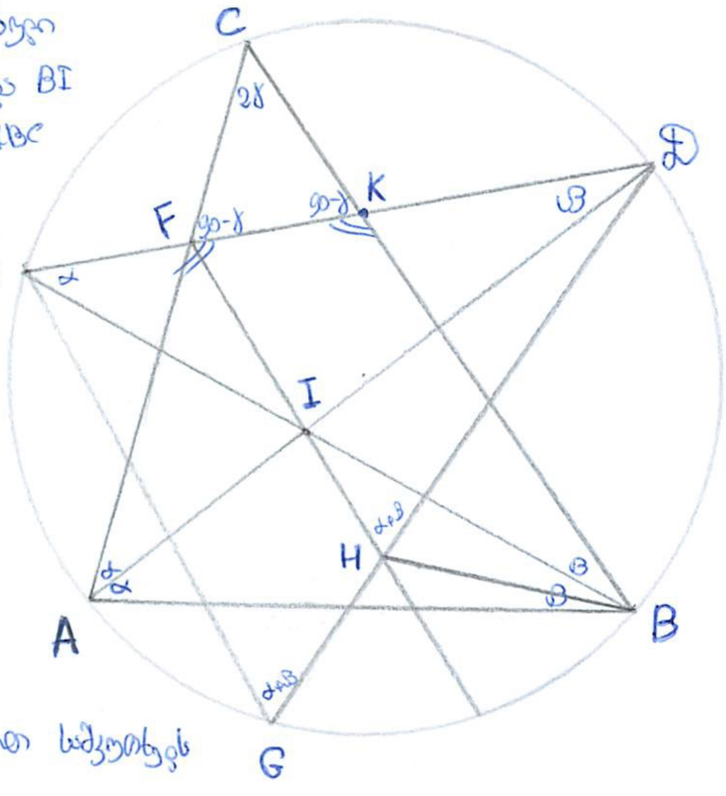
∠ACB 2γ-თი. შევნიშნოთ,

რომ ∠ADE ეყრდნობა იმავე

რკალს, რასაც ∠EBA, ანუ

$\angle ADE = \angle EBA = \beta$. ასევე

$\angle DEB = \angle DAB = \alpha$. განვიხილოთ სამკუთხედი



△EKB, სადაც $\angle EKB = 180 - \alpha - \beta$. ასევე △AFD, სადაც $\angle AFD = 180 - \alpha - \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EKB = \angle AFD \Rightarrow \angle CFK = \angle CKF$, ანუ △FCK ტოლფერდაა.

ასევე იმის გამო, რომ FH ∥ EG △EGD მსგავსია △FHG-ის.

6

თუ a და b ხოლოს სვეტის ბოლო უჯრების ჩანაწერი, ანუ ერთი მათგანი არ შეიძლება იყოს ნაკლები $\frac{1}{2}$-ზე, მაშინ ბოლო წინა, ~~[illegible]~~ გვაქვს: $a_n = b_n$ $a_{n-1} = a_n - \frac{1}{2}$ $b_{n-1} = \sqrt{b_n}$

$(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0$

$\frac{1}{2}\sqrt{b_n}\,(\sqrt{b_n} - 1) < 0$ ხდება $0 < \sqrt{b_n} < 1$ და $\sqrt{b_n} - 1 < 0$, ანუ თუ ~~[illegible]~~ მაშინ უჯრის ეს სიტუაცია ტოლობით იქნება, a_n და b_n ვერ იქნებიან ჩანაწერი.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 11

25.04.2015/ მათ/III/ 623

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$$7x^2-13xy+7y^2=(|x-y|+1)^3$$

$$6(x-y)^2+x^2-xy+y^2=(|x-y|)^3+3(|x-y|)^2+3(|x-y|)+1$$

სადაც ~~$(x-y)^2$~~ მივიღეთ მხოლოდ $6(x-y)^2=6(|x-y|)^2$ სადაც x-ის და y-ის ნებისმიერი მნიშვნელობისათვის გადადის ნ 0-ის ტოლი.

$$6(|x-y|)^2+x^2+y^2-xy=(|x-y|)^3+3(|x-y|)^2+3(|x-y|)+2-1$$

$$x^2+y^2-xy=\left((|x-y|)^3-3(|x-y|)^2+3(|x-y|)-1\right)+2$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy-2=(|x-y|-1)^3 \\ 7x^2+7y^2-13xy=(|x-y|+1)^3 \end{cases}$$ შევკრიბოთ ეს ორი ტოლობა

$$8x^2+8y^2-14xy-2=(|x-y|+1)^3+(|x-y|-1)^3$$ მივიღებთ მხოლოდ

დავშალოთ კუბების ჯამის სახით და მივიღებთ რომ

$$\overset{4}{\cancel{8}}x^2+\overset{4}{\cancel{8}}y^2-\overset{7}{\cancel{14}}xy-\overset{1}{\cancel{2}}=\overset{1}{\cancel{2}}|x-y|\left((|x-y|+1)^2-(|x-y|-1)(|x-y|+1)+(|x-y|-1)^2\right)$$

ორივე მივიღებთ, რომ

$$4x^2+4y^2-7xy-1=|x-y|\left((|x-y|)^2+3\right)$$

$$4(x-y)^2+xy-1=(|x-y|)^3+3|x-y|$$

$$(|x-y|)^3-4(|x-y|)^2+3|x-y|-xy+1=0$$

|x−y| აღვნიშნოთ a-თი, ~~xy~~ −xy+1 კი b-თი

$a^3 - 4a^2 + 3a - b = 0$ შევნიშნოთ, რომ

ფუნქციას

$f(a) = a^3 - 4a^2 + 3a - b$ და აქვს ზედა ფესვი.

გავაწარმოოთ ფუნქცია და ვიპოვოთ მისი ქვედა წერტილი

$f'(a) = 3a^2 - 8a + 3 = 0$

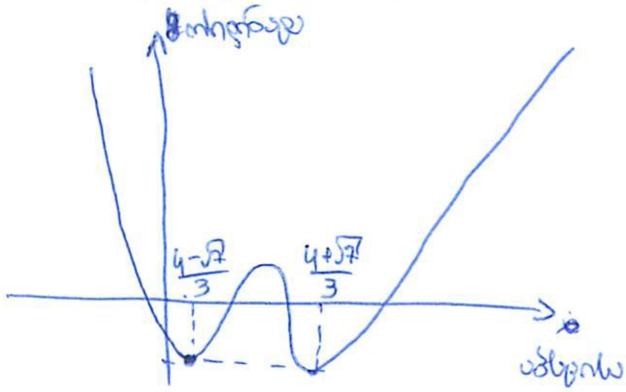
$D = 64 - 36 = 28$

$a = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{6}$

$a = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$ არის ფუნქციის ექსტრემუმის წერტილები

შემდეგნაირად. ამიტომ

თუ ... კი |x−y| მინიმალურია



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 11	25.04.2015/ მათ/III/ 623
ამოცანა № 3	გვერდი № 3

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა საწყის გამოსახულებაში $x=y$

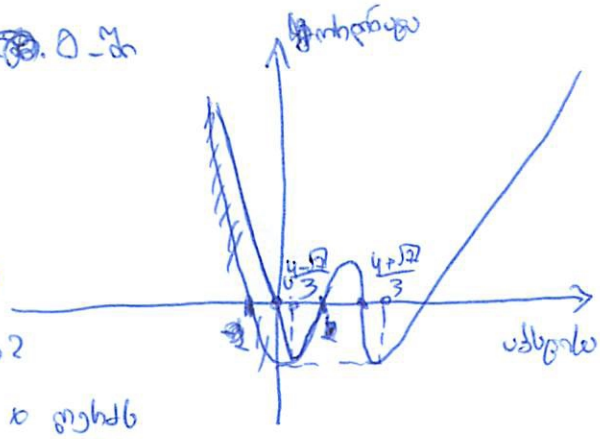
$7x^2-13xy+7y^2=(|x-y|+1)^3$

$7x^2-13x^2+7x^2=1^3$

$x^2=1$

$x=\pm1 \qquad y=\pm1$ და ფუნქცია $f(a)=a^3-4a^2+3a-6$

x-ღერძს კვეთავს ~~[illegible]~~ 0-ში



$\frac{4-\sqrt7}{3} \geq 1 \qquad \frac{4+\sqrt7}{3} > 2$

ის შუალედში $\frac{4-\sqrt7}{3}$-დან $\frac{4+\sqrt7}{3}$-მდე

მთელ[რიცხვ]ი მხოლოდ ორი ვიპოვნე: 1 და 2

ვნახოთ რა ფუნქცია 2-ში თუ კვეთს x ღერძს

$a=2$

$2^3-4\cdot2^2-3\cdot2-xy+1=0 \Rightarrow xy=-1\ , \ |x-y|=2$

$(|x-y|)^2=4 \qquad x^2-2xy+y^2=4$

$x^2+y^2+2=4$

$x^2+y^2=2$ აქვს ამონახსნები $(1;1)$, $(-1;-1)$, $(1;-1)$, $(-1,1)$

მაშინ ჩვენ გვიწყობს აქედან ორი ამონახსნი $x=\pm1$ და $y=\mp1$

ახლა ვნახოთ ფესვი 1-ის თუ აქვს ამონახსნის ფესვს

$1^3-4\cdot1^2+3\cdot1-xy+1=0$

$xy=1$

$|x-y|=1 \qquad (|x-y|)^2=1$

$x^2+y^2-2xy=1$

$x^2+y^2-2=1 \quad x^2-y^2=3$ ~~ხოლო არ~~ ავიღოთ.

ამ შემთხვევაში ლოგიკურს არ გააჩნია მთელი ამონახსნები, ამიტომ არ გვაინტერესებს.

შემდეგ ფესვი ამონახსნი ფესვს აქვს როცა $a>\frac{4+\sqrt{7}}{3}$. ანუ ამ შემთხვევაში $|x-y|>2$ და მეტი

ავიღოთ შემთხვევა $|x-y|=3$

$3^3-4\cdot3^2+3\cdot3-xy+1=0 \Rightarrow xy=1 \quad |x-y|=3$

$(|x-y|)^2=9 \quad x^2+y^2=9+2xy \quad x^2+y^2=11$

ამ ტოლობებს არ აქვს ამონახსნი მთელი x-ის და y-ისთვის, ამიტომ არც გვაინტერესებს

ახლა შემთხვევა $|x-y|=4$

$4^3-4\cdot4^2+3\cdot4-xy+1=0 \Rightarrow xy=13 \quad |x-y|=4$

$(x-y)^2=16$

$x^2+y^2=16+2\cdot13=42$

შემთხვევა, როცა $|x-y|=5$

$5^3-4\cdot5^2+3\cdot5-xy+1=0$

$xy=41 \quad |x-y|=5 \quad (x-y)^2=25 \quad x^2+y^2=25+2\cdot41=107$

ავიღოთ შემთხვევა, როცა $|x-y|=6$

$6^3-4\cdot6^2+3\cdot6-xy+1=0$

$xy=91 \quad |x-y|=6$

$(x-y)^2=36$

$x^2+y^2=36+2\cdot91=218$ ამ შემთხვევას აქვს 4 წყვილი მთელი ამონახსნები ისეთი, რომ $x^2+y^2=218$ და არის $|x-y|=6$

$(-7;-13)$ $(-13;-7)$ $(7;13)$ და $(13;7)$

და საბოლოოდ მივიღეთ 8 ცალი ამონახსნი

$(1;1)$ $7\cdot1^2-13\cdot1\cdot1+7\cdot1^2=(|1-1|+1)^3$ $\quad 1=1$

$(-1;-1)$ $7(-1)^2-13(-1)\cdot(-1)+7(-1)^2=(|-1-(-1)|+1)^3$ $\quad 1=1$

$(-1;1)$ $7(-1)^2-13(-1)\cdot1+7\cdot1^2=(|-1-1|+1)^3$ $\quad 27=27$

$(1;-1)$ $7\cdot1^2-13\cdot1\cdot(-1)+7(-1)^2=(|1-(-1)|+1)^3$ $\quad 27=27$

$(-7;-13)$ $7(-7)^2-13(-7)(-13)+7(-13)^2=(|-7-(-13)|+1)^3$ $\quad 7^3=7^3$

$(-13;-7)$ $7(-13)^2-13(-13)(-7)+7(-7)^2=(|-13-(-7)|+1)^3$ $\quad 7^3=7^3$

$(7;13)$ $7\cdot7^2-13\cdot7\cdot13+7\cdot13^2=(|7-13|+1)^3$ $\quad 7^3=7^3$

$(13;7)$ $7\cdot13^2-13\cdot13\cdot7+7\cdot7^2=(|13-7|+1)^3$ $\quad 7^3=7^3$